

ΜΑΘΗΜΑ 16

1.4 – 1.5 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

Η έννοια του ορίου

Όριο ταυτοτικής – σταθερής συνάρτησης

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Όριο και διάταξη

Όρια και πράξεις

Κριτήριο παρεμβολής

Τριγωνομετρικά όρια

Όριο σύνθετης συνάρτησης

Θεωρία – Σχόλια – Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ σημαίνει ότι

οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f προσεγγίζουν όλο και περισσότερο τον πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς $x \rightarrow x_0$

* Μπορεί και να είναι $f(x) = \ell$

2.

Ορισμός

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ σημαίνει ότι

οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f προσεγγίζουν όλο και περισσότερο τον πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς $x \rightarrow x_0^+$

* Μπορεί και να είναι $f(x) = \ell$

3.

Ορισμός

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ σημαίνει ότι

οι τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f προσεγγίζουν όλο και περισσότερο τον πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς $x \rightarrow x_0^-$

* Μπορεί και να είναι $f(x) = \ell$

4.

Θεώρημα

Ισχύει η ισοδυναμία : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

5.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

6.

Το πρόσημο του ορίου συμπεραίνει το πρόσημο της συνάρτησης

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ κοντά στο x_0

7.

Από ανισότητα συναρτήσεων σε ανισότητα ορίων

$f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

8.**Πράξεις**

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \kappa \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \text{εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v$

9.**Όριο πολωνυμικής**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

10.**Όριο ρητής**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \text{εφόσον } Q(x_0) \neq 0$$

11.**Κριτήριο παρεμβολής**

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

12.**Χρήσιμες ανισότητες**

- $|\eta \mu x| \leq |x| \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$
- $|\eta \mu x| < |x| \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$

13.

Τριγωνομετρικά όρια

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x}$

14.

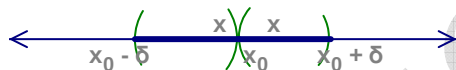
Όριο σύνθετης συνάρτησης

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u), \quad \text{όπου } u = g(x) \text{ και } u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

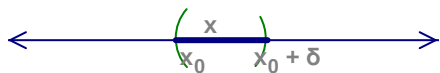
Το σύμβολο $x \rightarrow x_0$



- $x \rightarrow x_0$ σημαίνει ότι :
- Το x προσεγγίζει τον x_0 όλο και περισσότερο χωρίς να το φθάνει.
 - Η απόσταση του x από το x_0 όλο και μικραίνει χωρίς να μηδενίζεται.
 - Η απόσταση $|x - x_0|$ γίνεται μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό.
 - Είναι $0 < |x - x_0| < \delta$ για κάθε θετικό αριθμό δ
 $-\delta < x - x_0 < \delta$
 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

2.

Το σύμβολο $x \rightarrow x_0^+$

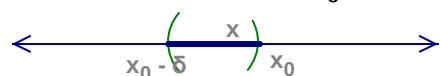


$x \rightarrow x_0^+$ σημαίνει ότι : $x \rightarrow x_0$ με $x > x_0$ (από δεξιά)

Δηλαδή είναι $0 < x - x_0 < \delta$ για κάθε θετικό αριθμό δ
 $x_0 < x < x_0 + \delta$

3.

Το σύμβολο $x \rightarrow x_0^-$



$x \rightarrow x_0^-$ σημαίνει ότι : $x \rightarrow x_0$ με $x < x_0$ (από αριστερά)

Δηλαδή είναι $-\delta < x - x_0 < 0$ για κάθε θετικό αριθμό δ
 $x_0 - \delta < x < x_0$

4.

Στη γραφή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

- Ο x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , μπορεί και όχι.
- Μπορεί να είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ μπορεί και όχι

5.

Η μοναδικότητα του ορίου

Όταν υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_0 , είναι μοναδικό.

6.

Άμεση συνέπεια

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

7.

Διευκρίνιση

Είναι γνωστό ότι, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$ **όχι αντίστροφα.**

Το αντίστροφο ισχύει μόνο όταν $\ell = 0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$.

8.

Από πρόσημο συνάρτησης σε πρόσημο ορίου

$f(x) < 0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$.

9.

Το κριτήριο παρεμβολής

- Ισχύει και με γνήσιες ανισότητες
- Συμπεραίνει την ύπαρξη του ορίου και τον υπολογισμό του.

10.

Συμπλήρωμα τριγωνομετρικών ορίων

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = 1$ **Απόδειξη :** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x \sigma\upsilon\nu x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = 1$$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\varepsilon\varphi x} = 1$ **Απόδειξη :** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\varepsilon\varphi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\varepsilon\varphi x}{x}}$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x} = 1$ **Απόδειξη :** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}}$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

11.

Στις ασκήσεις

Να θέτουμε όπου x το x_0 για να βρίσκουμε το είδος της απροσδιοριστίας

12.**Παρατήρηση**

Για την ώρα, η απροσδιοριστία θα είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και θα αίρεται με παραγοντοποίηση ή με συζυγή παράσταση ή με τριγωνομετρικά όρια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**Χωρίς απροσδιοριστία****1.**

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5}$

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5} = \frac{2^3 - 1}{2^2 - 5} = \frac{8 - 1}{4 - 5} = -7$$

2.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{x+3}$

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{x+3} = \frac{\sqrt{1+2} - \sqrt{1+1}}{1+3} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$$

3.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-2| + 2x - 1}{x+3}$

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-2| + 2x - 1}{x+3} = \frac{|3-2| + 2 \cdot 3 - 1}{3+3} = \frac{1+6-1}{6} = 1$$

Απροσδιοριστία σε ρητή

4.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) &= \frac{1}{1-1} - \frac{2}{1^2-1} = \frac{1}{0} - \frac{2}{0} \quad \text{αδύνατο} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2-x-2} \right)$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2-x-2} \right) &= \frac{1}{2-2} - \frac{3}{2^2-2-2} = \frac{1}{0} - \frac{3}{0} \quad \text{αδύνατο} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)(x+1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1-3}{(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^v + \beta x^\mu + \gamma}{x-1}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $v, \mu \in \mathbb{N}^*$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^v + \beta x^\mu - \alpha - \beta}{x-1} = \frac{\alpha \cdot 1^v + \beta \cdot 1^\mu - \alpha - \beta}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\alpha - \beta$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\alpha x^v + \beta x^\mu - \alpha - \beta}{x-1} \\ &= \frac{\alpha(x^v - 1) + \beta(x^\mu - 1)}{x-1} \\ &= \frac{\alpha(x-1)(x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + 1) + \beta(x-1)(x^{\mu-1} + x^{\mu-2} + \dots + 1)}{x-1} \end{aligned}$$

$$= \alpha(x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + 1) + \beta(x^{\mu-1} + x^{\mu-2} + \dots + 1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \alpha(1^{v-1} + 1^{v-2} + \dots + 1) + \beta(1^{\mu-1} + 1^{\mu-2} + \dots + 1) \\ &= \alpha v + \beta \mu \end{aligned}$$

Στις απόλυτες τιμές

7.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2| + |2x-1| - 4}{x-1}$

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2| + |2x-1| - 4}{x-1} = \frac{|1+2| + |2 \cdot 1 - 1| - 4}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 1+2 = 3 > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \text{ κοντά στο } x_0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1) = 2-1 = 1 > 0 \Rightarrow 2x-1 > 0 \text{ κοντά στο } x_0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2| + |2x-1| - 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2+2x-1-4}{x-1}$$

Απαλλασσόμαστε από τις απόλυτες τιμές

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 3 = 3$$

8.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - x + 2| - 2}{x}$

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - x + 2| - 2}{x} = \frac{|0^2 - 0 + 2| - 2}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x + 2) = 2 > 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 > 0 \quad \text{κοντά στο } 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - x + 2| - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + 2 - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1 \end{aligned}$$

9.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f^3(x) - f(x)| - 6}{|-f(x)| - 2}$

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \text{κοντά στο } x_0 \Rightarrow |-f(x)| = |f(x)| = f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f^3(x) - f(x)] = 2^3 - 2 = 6 > 0 \Rightarrow f^3(x) - f(x) > 0 \quad \text{κοντά στο } x_0$$

$$|f^3(x) - f(x)| = f^3(x) - f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f^3(x) - f(x)| - 6}{|-f(x)| - 2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) - f(x) - 6}{f(x) - 2}$$

(Horner)

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - 2][f^2(x) + 2f(x) + 3]}{f(x) - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} [f^2(x) + 2f(x) + 3] = 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 11$$

10.

Να βρείτε το όριο της $f(x) = \frac{|x^2 + x| - |x + 1|}{x + 1}$ στο $x_0 = -1$

Προτεινόμενη λύση

Για κάθε x κοντά στο -1 είναι $f(x) = \frac{|x(x+1)| - |x+1|}{x+1}$

$$f(x) = \frac{|x||x+1| - |x+1|}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{|x+1|(|x|-1)}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|(|x|-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)(|x|-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (1-|x|) = 1-1=0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1|(|x|-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(|x|-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (|x|-1) = 1-1=0$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

11.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x + \eta\mu x| + |x - \eta\mu x|}{\sqrt{x+4} - 2}$ δεν έχει όριο

στο $x_0 = 0$.

Προτεινόμενη λύση

- Όταν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$x > 0 \text{ και } \eta\mu x > 0 \Rightarrow x + \eta\mu x > 0$$

$$\text{Η ανίσωση } |\eta\mu x| < |x| \text{ γίνεται } \eta\mu x < x \Rightarrow 0 < x - \eta\mu x$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f(x) &= \frac{x + \eta\mu x + x - \eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2} = \frac{2x}{\sqrt{x+4} - 2} = \frac{2x(\sqrt{x+4} + 2)}{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)} \\ &= \frac{2x(\sqrt{x+4} + 2)}{x+4-4} = 2(\sqrt{x+4} + 2) \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2(\sqrt{0+4} + 2) = 8 \quad (1)$$

- Όταν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$x < 0 \text{ και } \eta\mu x < 0 \Rightarrow x + \eta\mu x < 0$$

$$\text{Η ανίσωση } |\eta\mu x| < |x| \text{ γίνεται } -\eta\mu x < -x \Rightarrow x - \eta\mu x < 0$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f(x) &= \frac{-x - \eta\mu x - x + \eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2} = \frac{-2x}{\sqrt{x+4} - 2} = \frac{-2x(\sqrt{x+4} + 2)}{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)} \\ &= \frac{-2x(\sqrt{x+4} + 2)}{x+4-4} = -2(\sqrt{x+4} + 2) \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2(\sqrt{0+4} + 2) = -8 \quad (2)$$

Από τις (1), (2), τα πλευρικά όρια στο $x_0 = 0$ είναι διαφορετικά, άρα δεν υπάρχει όριο στο $x_0 = 0$.

Εύρεση παραμέτρων

12.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x - 2}{x^2 - 1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το όριο της f στο $x_0 = 1$ είναι πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ είναι συνευθειακά.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Κοντά στο $x_0 = 1$ είναι $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x - 2}{x^2 - 1} \Rightarrow$

$$f(x)(x^2 - 1) = \alpha x^2 + \beta x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x^2 - 1)] = \lim_{x \rightarrow 1} (\alpha x^2 + \beta x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = \alpha 1^2 + \beta 1 - 2$$

$$\ell \cdot 0 = \alpha + \beta - 2$$

$$\alpha + \beta - 2 = 0$$

Άρα τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύουν την εξίσωση $x + y - 2 = 0$, που παριστάνει ευθεία ε , επομένως τα σημεία $M \in \varepsilon$.

13.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha|x-1| + \beta|x-3| + 4}{x^2 - 3x + 2} = 6$

Προτεινόμενη λύση

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow x > 1 \text{ κοντά στο } x_0 = 2 \Rightarrow |x-1| = x-1$$

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow x < 3 \text{ κοντά στο } x_0 = 2 \Rightarrow |x-3| = -x+3$$

Η υπόθεση γίνεται $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha(x-1) + \beta(-x+3) + 4}{x^2 - 3x + 2} = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x - \alpha - \beta x + 3\beta + 4}{(x-1)(x-2)} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\alpha - \beta)x - \alpha + 3\beta + 4}{(x-1)(x-2)} = 6 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha - \beta)x - \alpha + 3\beta + 4}{(x-1)(x-2)}$ κοντά στο $x_0 = 2$.

Τότε $f(x)(x-1)(x-2) = (\alpha - \beta)x - \alpha + 3\beta + 4$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)(x-1)(x-2)] = \lim_{x \rightarrow 2} [(\alpha - \beta)x - \alpha + 3\beta + 4]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = (\alpha - \beta) \cdot 2 - \alpha + 3\beta + 4$$

$$6 \cdot (2-1) \cdot 0 = 2\alpha - 2\beta - \alpha + 3\beta + 4 \Rightarrow 0 = \alpha + \beta + 4 \Rightarrow \alpha = -\beta - 4 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-\beta - 4 - \beta)x + \beta + 4 + 3\beta + 4}{(x-1)(x-2)} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-2\beta - 4)x + 4\beta + 8}{(x-1)(x-2)} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(\beta + 2)x + 4(\beta + 2)}{(x-1)(x-2)} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(\beta + 2)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(\beta + 2)}{x-1} = 6$$

$$\frac{-2(\beta + 2)}{2-1} = 6 \Rightarrow \beta + 2 = -3 \Rightarrow \beta = -5$$

$$(2) \Rightarrow \alpha = 5 - 4 = 1$$

Απροσδιοριστία σε άρρητη.

(Παραγοντοποίηση ή συζυγής)

14.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

Προτεινόμενη λύση

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$$

15.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2}}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2}}{\sqrt{x^2 - 2x}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x(x-2)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x} \sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2+2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

16.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+2-\sqrt{x+8}}$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+2-\sqrt{x+8}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2+\sqrt{x+8})}{(x+2-\sqrt{x+8})(x+2+\sqrt{x+8})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2+\sqrt{x+8})}{(x+2)^2 - (x+8)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2+\sqrt{x+8})}{x^2 + 4x + 4 - x - 8} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2+\sqrt{x+8})}{x^2 + 3x - 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2+\sqrt{x+8})}{(x-1)(x+4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2+\sqrt{x+8}}{x+4} = \frac{1+2+\sqrt{1+8}}{1+4} = \frac{6}{5}
 \end{aligned}$$

17.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4+\sqrt{x+2}}{x-2}$

Υπόδειξη.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4+\sqrt{x+2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-4+\sqrt{x+2})(x-4-\sqrt{x+2})}{(x-2)(x-4-\sqrt{x+2})}$$

18.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x + 3\sqrt{x} + 1}{x - 1}$

Προτεινόμενη λύση

Θέτουμε $u = \sqrt{x}$, οπότε $u \rightarrow 1$ και $u^2 = x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x + 3\sqrt{x} + 1}{x - 1} &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{-4u^2 + 3u + 1}{u^2 - 1} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{-4(u-1)(u + \frac{1}{4})}{(u-1)(u+1)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{-4u-1}{u+1} = \frac{-4 \cdot 1 - 1}{1+1} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

19.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[v]{x}-1}$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$

Υπόδειξη.

Θέτουμε $u = \sqrt[v]{x}$, οπότε $u \rightarrow 1$ και $u^v = x$

20.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 2$ και $g(x) \neq 2$ κοντά στο x_0 , να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{g^2(x) + 5} - 3}{g(x) - 2}.$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{g^2(x) + 5} - 3}{g(x) - 2} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[\sqrt{g^2(x) + 5} - 3][\sqrt{g^2(x) + 5} + 3]}{[g(x) - 2][\sqrt{g^2(x) + 5} + 3]} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^2(x) + 5 - 9}{[g(x) - 2][\sqrt{g^2(x) + 5} + 3]} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^2(x) - 4}{[g(x) - 2][\sqrt{g^2(x) + 5} + 3]} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[g(x) - 2][g(x) + 2]}{[g(x) - 2][\sqrt{g^2(x) + 5} + 3]} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) + 2}{[\sqrt{g^2(x) + 5} + 3]} = \frac{2 + 2}{\sqrt{4 + 5} + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

21.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha}{\sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha}{\sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha][\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha][\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta]}{[\sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta][\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha][\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^2 + \alpha^2 - \alpha^2][\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta]}{[x^2 + \beta^2 - \beta^2][\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 [\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta]}{x^2 [\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + \beta^2} + \beta}{\sqrt{x^2 + \alpha^2} + \alpha} = \frac{\sqrt{0^2 + \beta^2} + \beta}{\sqrt{0^2 + \alpha^2} + \alpha} = \frac{\beta + \beta}{\alpha + \alpha} = \frac{2\beta}{2\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}
 \end{aligned}$$

22.

Να βρείτε το όριο της $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 1}}$ στο $x_0 = -1$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
 \text{Πρέπει } x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 1} &\neq 0 \\
 x + 1 - \sqrt{(x+1)^2} &\neq 0 \\
 x + 1 - |x+1| &\neq 0 \\
 |x+1| &\neq x + 1 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 1}{x + 1 - |x+1|} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + 1}{x + 1 + x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{2(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x + 1}{2} = \frac{(-1)^2 + 1 + 1}{2} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$